# PART2　根号を含む式の計算

**例題**

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　$xy$　　(iii)　$x^2+y^2$

**Point Pickup**

**練習**

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　$xy$　　(iii)　$x^2+y^2$

# 第 3 講　PART2　確認問題

**1** 次の式の分母を有理化せよ。

$$\frac{8-\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}=\frac{\boxed{アイ}-16\sqrt{5}}{\boxed{ウエ}}$$

**2** 次の式の分母を有理化せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{6}}=\frac{\boxed{オ}+\sqrt{5}-\sqrt{30}}{\boxed{カキ}}$$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

**3** $x+y=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$

**4** $xy=\boxed{サ}$

**5** $x^2+y^2=\boxed{シス}$

# PART2　根号を含む式の計算

例題

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(ii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i) $x+y$　　(ii) $xy$　　(iii) $x^2+y^2$

(1)(i) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(ii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

(2) $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(i) $x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

(ii) $xy=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{4}{4}=1$

(iii) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\cdot1=3$

**練習**

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　$xy$　　(iii)　$x^2+y^2$

(1)(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=7-4\sqrt{3}$

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i)　$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

(ii)　$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$

(iii)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 1=10$

# 第3講　PART2　確認問題 解答

## 1

**[正解]** アイ：69，ウエ：59

**[解説]**

$$\frac{8-\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}=\frac{(8-\sqrt{5})^2}{(8+\sqrt{5})(8-\sqrt{5})}$$ [A]

$$=\frac{64-16\sqrt{5}+5}{64-5}=\mathbf{\frac{69-16\sqrt{5}}{59}}$$

[A]　分母の有理化
$(\sqrt{a})^2=a$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
を利用する。

## 2

**[正解]** オ：5，カキ：10

**[解説]**

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{6}}{\{(\sqrt{5}+1)+\sqrt{6}\}\{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{6}\}}$$ [B]

$$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{(\sqrt{5}+1)^2-6}=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{5}+1)-6}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1-\sqrt{6})}{2\times 5}$$

$$=\mathbf{\frac{5+\sqrt{5}-\sqrt{30}}{10}}$$

[B]　分母が簡単になるように工夫する。

## 3

**[正解]** ク：2，ケコ：11

**[解説]**

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$x+y=(\sqrt{11}-\sqrt{10})+(\sqrt{11}+\sqrt{10})$$ [C]

$$=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

[C]　$x$，$y$ の分母をそれぞれ有理化してから式に代入する。

## 4 [正解] サ：1

**[解説]**

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$xy=(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})$$ [D]

$$=\mathbf{1}$$

[D]　$x$，$y$ の分母をそれぞれ有理化してから式に代入する。

（別解）

$$xy=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\mathbf{1}$$

## 5 [正解] シス：42

**[解説]**

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$ [E]

[E]　$x^2+y^2$ のように，$x$ と $y$ を入れ替えても，もとの式と変わらない式を，$x$, $y$ の対称式という。$x$, $y$ の対称式は，基本対称式 $x+y$，$xy$ で表すことができる。

ここで，

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$x+y=2\sqrt{11}$$

$$xy=1$$

であるから，

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{11})^2-2\cdot1=\mathbf{42}$$